Theorem. For $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\|\mathbf{X}\|_2 \leq \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{X}(:,k)\|_2$.

Proof.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}\|_2 &\leq \|\mathbf{X}\|_F \\ &\neq \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{X}(:,j)\|_2 \quad \text{this is false, this is just careless mistake} \end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}\|_F^2 &= \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{X}(:,j)\|_2^2 \qquad \text{By definition of F-norm} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \max_k \|\mathbf{X}(:,k)\|_2^2 \\ &\leq n \max_k \|\mathbf{X}(:,k)\|_2^2 \end{aligned}$$

Therefore

$$\|\mathbf{X}\|_F \leq \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{X}(:,k)\|_2$$

Hence

$$\|\mathbf{X}\|_2 \leq \|\mathbf{X}\|_F \leq \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{X}(:,k)\|_2$$

End of document